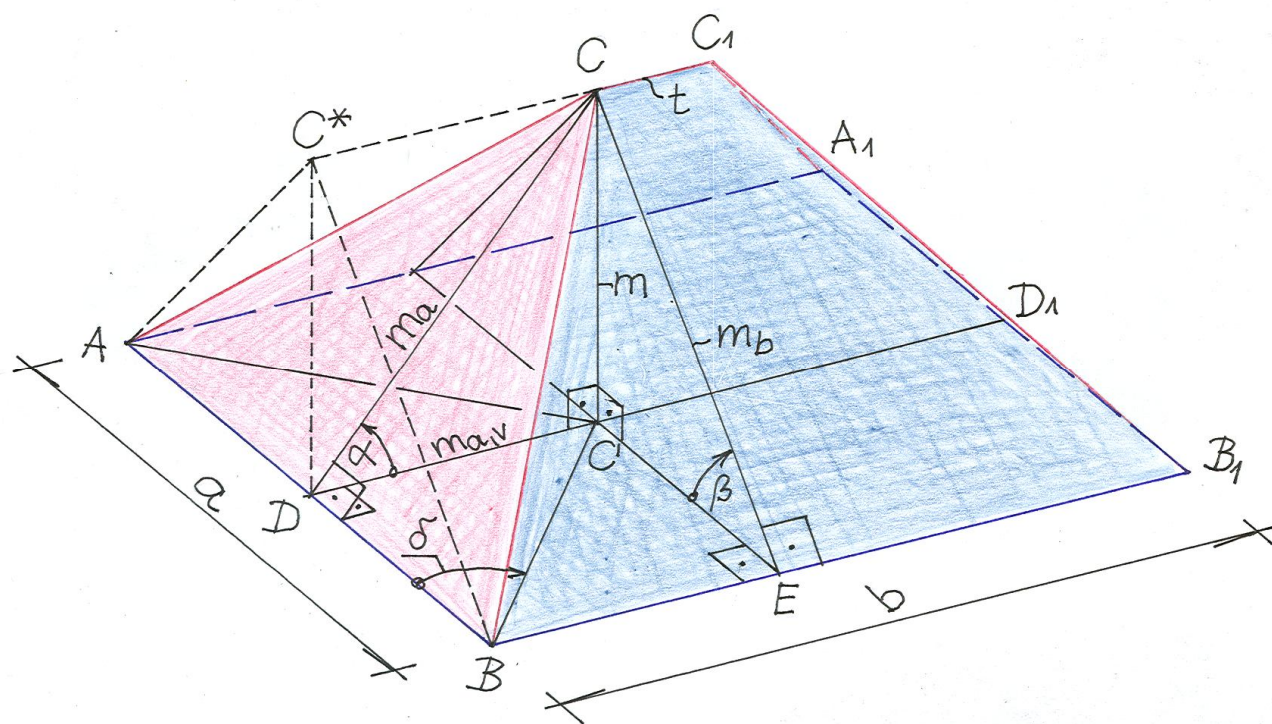


Néhány egyszerű tétel kontytetőre

Tekintsük az 1. ábra szerinti *szimmetrikus kontytetőt*!



1. ábra

Az $ABC'\Delta$ területe:

$$T_{ABC'} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot m_{a,v}; \quad (1)$$

az $ABC \triangle$ területe:

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot m_a; \quad (2)$$

az $ABC^* \Delta$ területe:

$$T_{ABC^*} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot m \text{ .} \quad (3)$$

Az 1. ábra szerint:

$$\frac{m_{a,v}}{m_a} = \cos \alpha; \quad (4)$$

$$\frac{m}{m_a} = \sin \alpha . \quad (5)$$

Most (2) és (4) - gyel:

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{m_{a,v}}{\cos \alpha}; \quad (6)$$

majd (2) és (5) - tel:

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{m}{\sin \alpha}. \quad (7)$$

Továbbá (1) és (6) - tal:

$$T_{ABC} = \frac{T_{ABC'}}{\cos \alpha}; \quad (8)$$

majd (3) és (7) - tel:

$$T_{ABC} = \frac{T_{ABC*}}{\sin \alpha}. \quad (9)$$

A (8) képlet alapján az

1. Tétel:

A konty - síkidom (háromszög) tényleges területe egyenlő a konty - síkidom *felülnézeti* képe területének és hajlásszöge *koszinuszának* hányadosával.

A (9) képlet alapján a

2. Tétel:

A konty - síkidom (háromszög) tényleges területe egyenlő a konty - síkidom *oldalnézeti* képe területének és hajlásszöge *szinusznak* hányadosával.

Most számítsuk ki a konytető felszínét, azaz az összetevő síkidomok terület - összegét!

A felszín, az 1. ábra jelöléseivel:

$$A = 2 \cdot T_{ABC} + 2 \cdot T_{BB_1CC_1}. \quad (10)$$

(9) szerint is:

$$T_{ABC} = \frac{T_{ABC*}}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot m \cdot \frac{1}{\sin \alpha}. \quad (11)$$

Most a $CC'E \Delta$ - ből:

$$m = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad (12)$$

majd (11) és (12) - vel:

$$T_{ABC} = \left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha} = \left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (13)$$

Innen (10) első tagja:

$$2 \cdot T_{ABC} = 2 \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (14)$$

Ezután határozzuk meg a trapéz alakú tetősíkidomok területét!

$$T_{BB_1CC_1} = b \cdot m_b - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m_b \cdot m_{a,v} = m_b \cdot (b - m_{a,v}). \quad (15)$$

Ismét az 1. ábra alapján:

$$m_b = \frac{a}{2 \cdot \cos \beta}; \quad (16)$$

majd (12) - vel is:

$$m_{a,v} = m \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = m \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{m}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}; \quad (17)$$

most a (15), (16), (17) képletekkel:

$$T_{BB_1CC_1} = \frac{a}{2 \cdot \cos \beta} \cdot \left[b - \frac{a}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \right]. \quad (18)$$

Innen (10) második tagja:

$$2 \cdot T_{BB_1CC_1} = \frac{a}{\cos \beta} \cdot \left[b - \frac{a}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \right] = \frac{a \cdot b}{\cos \beta} - 2 \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \beta}. \quad (19)$$

Most (10), (14) és (19) - cel:

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{a \cdot b}{\cos \beta} - 2 \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \beta} = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\cos \beta} \right) + \frac{a \cdot b}{\cos \beta}. \end{aligned} \quad (20)$$

Mivel (8) és (13) szerint:

$$T_{ABC'} = \left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad (21)$$

és mivel a teljes tető felülnézeti vetületi területe

$$T_{\text{vet}} = a \cdot b, \quad (22)$$

ezért (20), (21) és (22) - vel a szimmetrikus kontytető felszíne:

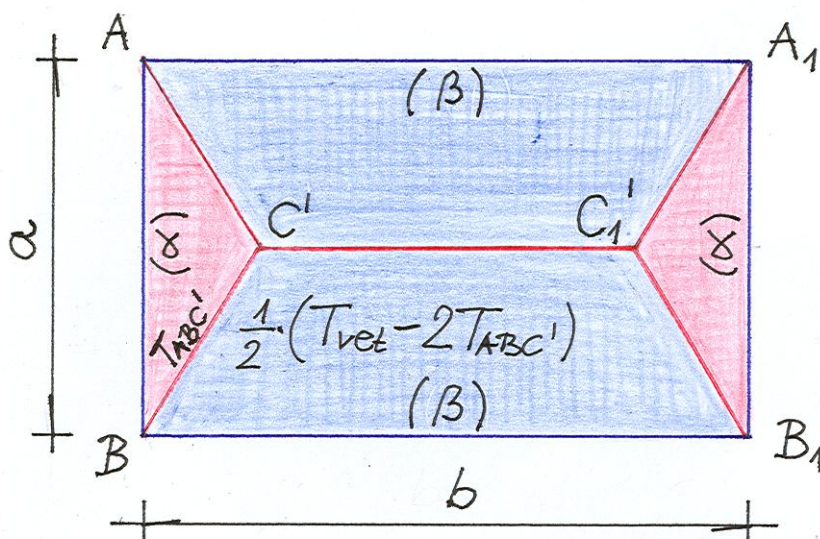
$$A = 2 \cdot T_{ABC'} \cdot \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\cos \beta} \right) + \frac{T_{\text{vet}}}{\cos \beta}. \quad (23)$$

Már ez is lehetne a végeredmény, de a szemléletesség még fokozható.

Ennek érdekében átrendezzük (23) - at:

$$\underline{\underline{A = 2 \cdot \frac{T_{ABC'}}{\cos \alpha} + \frac{T_{\text{vet}} - 2 \cdot T_{ABC'}}{\cos \beta}}. \quad (24)$$

A (24) összefüggés megjegyzését elősegítheti a 2. ábra is.



2. ábra

Ezek alapján kézenfekvő a fentieket általánosító alábbi

3. Tétel:

Az α_i hajlásszögű tetősíkokból álló tető A felszínét úgy határozzuk meg, hogy képezzük az egyes tetőrészek $T_{\text{vet},i}$ *alaprajzi* területének és hajlásszögük koszinuszának a hányadosát, és vesszük ezek összegét.

Képlettel:

$$\underline{\underline{A = \frac{T_{\text{vet},1}}{\cos \alpha_1} + \frac{T_{\text{vet},2}}{\cos \alpha_2} + \dots + \frac{T_{\text{vet},i}}{\cos \alpha_i} + \dots + \frac{T_{\text{vet},n}}{\cos \alpha_n} \equiv \sum_{i=1}^n \frac{T_{\text{vet},i}}{\cos \alpha_i}}.$$

Megjegyzések:

M1. A 3. Tétel alkalmazásához elő kell állítani – szerkesztés vagy számítás útján – a tető felülnézeti képén az adott tetőhajlásokhoz tartozó vetületi síkidomokat, ill. ezek területét. A szimmetrikus kontytető fenti esetében számítással oldottuk meg ezt a feladatot.

M2. Az α és β hajlású tetősíkok metszésvonalának helyzetét példánkban a felülnézeti képen – az 1. ábrán látható – δ szöggel jellemeztük.

Ennek nagyságára az 1. ábra és (17) szerint:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{m_{a,v}}{\frac{a}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (25)$$

Azonos tetőhajlások esetén $\beta = \alpha$, így $\operatorname{tg} \delta = 1$, amiből $\delta = 45^\circ$, derékszögű ereszsarok esetében, mint fent is. Más szavakkal: azonos hajlású tetősíkok metszésvonalának felülnézeti képe *szögfelező helyzetű*. Ez az állítás általánosabban is igaz.

M3. Az 1. ábra segítségével nyomon követhetjük a konty - háromszög alakulását, ha az α hajlásszög a derékszöghöz tart. A függőleges helyzetbe fordult konty - háromszög / *oromfali háromszög* területe a (3) képlettel adódik.

M4. A (20) képletből kiolvasható, hogy az egyező hajlásszögű tetősíkokból álló szimmetrikus kontytető felszíne megegyezik az ugyanazon alaprajzra állított *szimmetrikus nyeregtető* felszínével.

M5. A (20) képletből az is kiolvasható, hogy $\alpha = 90^\circ$ esetén a β hajlású *nyeregtető* felszínébe az oromfalak területe is beleszámítana. Minthogy ez zavart okozhat – pl.: az oromfali háromszögeket nem, vagy nem ugyanazzal az anyaggal fedik, ill. burkolják, mint a nyeregrészt, stb. –, így célszerű lehet a tetőfelszín számításához az $0 < \alpha < 90^\circ$ kikötést tenni.

Most térjünk vissza a kontytetőt alkotó síkidomokhoz – ld. 1. ábra!

A DCC_1D_1 trapéz az *előlnézeti képen* jelenik meg; ennek területe, az ábra jelöléseivel:

$$T_{tr}^e = \frac{t + b}{2} \cdot m. \quad (26)$$

A BCC_1B_1 trapéz területe:

$$T_{tr} = \frac{t + b}{2} \cdot m_b. \quad (27)$$

Felhasználva, hogy az 1. ábra szerint is

$$\frac{m}{m_b} = \sin \beta, \quad (28)$$

(27) és (28) - cal:

$$T_{tr} = \frac{t + b}{2} \cdot \frac{m}{\sin \beta}; \quad (29)$$

majd (26) és (29) összehasonlításával:

$$T_{tr} = \frac{T_{tr}^e}{\sin \beta}. \quad (30)$$

A (30) képlet alapján a

4. Tétel:

A kontytető trapéz alakú tető - síkidomának területét megkapjuk, ha a trapéz *előlnézeti* képének területét osztjuk a saját hajlásszöge szinuszával.

A fentiek szerint másképpen is felírhatjuk a szimmetrikus kontytető felszínét.

Az 1. ábra szerint az ABC^* vetület - háromszög az *oldalnézeti képen* látható, ezért a

$T_{ABC^*} = T_h^o$ és $T_{ABC} = T_h$ jelölésekkel, (9) szerint:

$$T_h = \frac{T_h^o}{\sin \alpha}. \quad (31)$$

A tető felszíne:

$$A = 2 \cdot T_h + 2 \cdot T_{tr}, \quad (32)$$

majd (30), (31) és (32) - vel:
$$A = 2 \cdot \frac{T_h^o}{\sin \alpha} + 2 \cdot \frac{T_{tr}^e}{\sin \beta},$$

végül

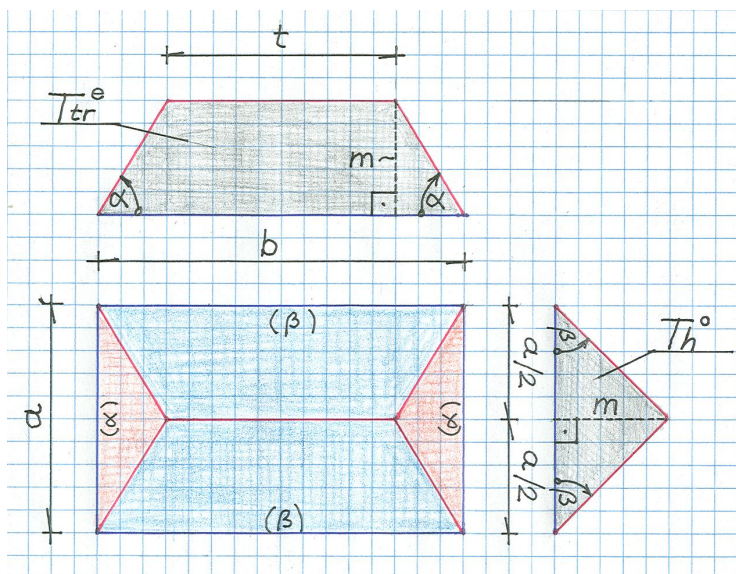
$$\underline{\underline{A = 2 \cdot \left(\frac{T_h^o}{\sin \alpha} + \frac{T_{tr}^e}{\sin \beta} \right).}} \quad (33)$$

A (33) képlet alapján az

5. Tétel:

A szimmetrikus kontytető felszínét úgy is meghatározhatjuk, hogy az elől - és az oldalnézeti síkidomok területét osztjuk a saját ereszvonalukból induló tetősík hajlásszögének szinuszával, majd vesszük a kapott értékek összegének a kétszeresét.

A (33) összefüggés megjegyzését segítheti a 3. ábra is.



Összeállította: Galgóczi Gyula
mérnöktanár

Szödliget, 2008. szeptember 23.

3. ábra